

Первообразная функции и неопределённый интеграл

В дифференциальном исчислении решалась задача, где по данной функции $y = f(x)$ находилась ее производная или дифференциал.

Интегрирование - это процесс нахождения по дифференциалу данной функции самой функции.

Первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется функция $F(x)$, производная которой в каждой точке отрезка равна $f(x)$, т.е.:

$$F'(x) = f(x)$$

Теорема. *Две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$, определенные на некотором промежутке, отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.*

Т.е. $F(x) + C$ - это есть совокупность всех первообразных для функции $f(x)$.

Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от этой функции и

обозначается: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где

$f(x)$ - подынтегральная функция; $f(x) dx$ - подынтегральное выражение;

$F(x)$ - первообразная для $f(x)$; C - постоянная интегрирования;

x - переменная интегрирования; \int - знак интеграла.

Действие нахождения первообразной для функции $f(x)$ называется **интегрированием** данной функции.

Основные свойства неопределенного интеграла.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \qquad F'(x) = f(x)$$

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого: $\int d(F(x)) = F(x) + C$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int A \cdot f(x) dx = A \int f(x) dx, \quad A \neq 0$$

5. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функции: $\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$

Таблица основных интегралов.

1. $\int dx = x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
5. $\int e^u du = e^u + C$	15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
6. $\int \cos u du = \sin u + C$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$	17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C$
8. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$	18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
9. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$	
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$	

Непосредственное интегрирование функций

1. *Интегрирование по таблице.*

Заключается в прямом использовании табличных интегралов и свойств интегралов.

2. *Непосредственное интегрирование.*

Решение типовых примеров

Найти неопределенный интеграл

Пример 1. $\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1 \right) dx$

Решение:

$$\int \left(2x^3 - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} + 1 \right) dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int x^{2/3} dx + 4 \int x^{-3} dx + \int dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^2} + x + C$$

Задания для решения в аудитории

Найти указанные интегралы:

$$1) \int \left(5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^4} \right) dx$$

$$2) \int \left(x^7 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2^x \right) dx$$

Интегрирование методом подстановки

Пусть $\int f(x) dx$ не является табличным. Следует упростить подынтегральное выражение, введя новую переменную так, чтобы интеграл стал табличным.

$$\boxed{\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{matrix}}, \text{ т.е.}$$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) \cdot d(\varphi(t)) = F(\varphi(t)) + C$$

После нахождения интеграла необходимо вернуться к первоначальной переменной x . Такой способ нахождения интеграла называется **методом замены переменной** или **методом подстановки**.

Подведение множителя под знак дифференциала

$dx = d(x+b), b - const$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$	$\cos x dx = d(\sin x)$
$dx = \frac{1}{a} d(ax+b), a \neq 0$	$\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	$\sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x$
$x dx = \frac{1}{2} d(x^2+b)$	$\cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$

Выбор удачной формулы (подстановки) для замены переменной имеет большое значение. Вместе с тем дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int x\sqrt{x-1} dx$

Замечание: В данном примере с первого взгляда не определить, что подвести под знак дифференциала, а поэтому сделаем подстановку, позволяющую избавиться от иррациональности. Обозначим $\sqrt{x-1} = t$. Эта подстановка приводит исходный интеграл к новому интегралу, сводящемуся к табличному.

Решение:

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t \\ x = t^2 + 1 \\ dx = 2tdt \end{array} \right| = \int (t^2 + 1) \cdot t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4 + t^2) dt =$$
$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{5}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{5}(x-1)^{3/2} + C$$

Если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $f(x)$, то есть выражение $f'(x)dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = f(x)$.

Пример 2. Найти $\int \sqrt[3]{1 + \sin x} \cdot \cos x dx$

Решение: $\int \sqrt[3]{1 + \sin x} \cdot \cos x dx = \left. \begin{array}{l} 1 + \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^{1/3} dt = \frac{t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + \sin x)^4} + C$

Если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin \frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{-x^3} , то $t = -x^3$).

Задания для решения в аудитории

Найти неопределенные интегралы:

1.

3) $\int e^{-3x} dx$.

4) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

5) $\int (3 - 2x)^4 dx$.

2.

1) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln x)}$

2) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$

3) $\int x e^{-x^2} dx$

5) $\int \frac{3^{\arctg x}}{1 + x^2} dx$

5.4 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции.

Данная формула называется **формулой интегрирования по частям**.
Основные типы интегралов, «берущихся» по частям

	интеграл	u	dv
I	$\int p(x) \cdot e^{\alpha x} dx$	$p(x)$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int p(x) \cdot \sin \alpha x dx$	$p(x)$	$\sin \alpha x dx$
	$\int p(x) \cdot \cos \beta x dx$	$p(x)$	$\cos \beta x dx$
II	$\int p(x) \cdot \ln x dx$	$\ln x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arcsin x dx$	$\arcsin x$	$p(x) dx$
	$\int p(x) \cdot \arccos x dx$	$\arccos x$	$p(x) dx$
III	$\int e^{\alpha x} \cdot \sin \alpha x dx$	$e^{\alpha x}$	$\sin \alpha x dx$
		$\sin \alpha x$	$e^{\alpha x} dx$
	$\int e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x dx$	$e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x} dx$
		$\cos \beta x$	$\cos \beta x dx$
	$\int \sin(\ln x) dx$	$\sin(\ln x)$	dx

Замечания:

1. Интегралы 1-го типа берутся **n**-кратным интегрированием, если $P(x)$ - многочлен **n**-й степени.

2. Интегралы 3-го типа берутся по частям дважды, в результате чего получается исходный интеграл. Интегрирование прекращается, и из полученного выражения находят искомый интеграл, выражая его через все остальные члены.

Решение типовых примеров

Пример 1. Найти $\int x \cdot e^{-2x} dx$

Решение:

$$\int x \cdot e^{-2x} dx = \left. \begin{array}{l} x = u; e^{-2x} dx = dv \\ dx = dv; v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C; (C = 0) \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) dx = -\frac{1}{2} x \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

Пример 2. Найти $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

Решение:

$$\begin{aligned}\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx &= \left. \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1-1)dx}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C\end{aligned}$$